

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования «Саратовский государственный технический
университет имени Гагарина Ю.А.»

Профессионально-педагогический колледж



**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ
ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ**

по дисциплине
ЕН.01 Математика

специальности
21.02.05 «Земельно-имущественные отношения»

Методические указания рассмотрены
на заседании цикловой методической комиссии
технических специальностей

Председатель ЦМК

Е.Э.Воеводина

Саратов 2024

Пояснительная записка

Методические указания по выполнению практических работ разработаны в соответствии с рабочей программой учебной дисциплины «Математика», требованиями ФГОС СПО специальности 21.02.05 «Земельно-имущественные отношения» и соответствующих общих (ОК) и профессиональных компетенций (ПК):

ОК 1. Понимать сущность и социальную значимость своей будущей профессии, проявлять к ней устойчивый интерес.

ОК 2. Анализировать социально-экономические и политические проблемы и процессы, использовать методы гуманитарно-социологических наук в различных видах профессиональной и социальной деятельности.

ОК 3. Организовывать свою собственную деятельность, определять методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество.

ОК 4. Решать проблемы, оценивать риски и принимать решения в нестандартных ситуациях.

ОК 5. Осуществлять поиск, анализ и оценку информации, необходимой для постановки и решения профессиональных задач, профессионального и личностного развития.

ОК 6. Работать в коллективе и команде, обеспечивать ее сплочение, эффективно общаться с коллегами, руководством, потребителями.

ОК 7. Самостоятельно определять задачи профессионального и личностного развития, заниматься самообразованием, осознанно планировать повышение квалификации.

ОК 8. Ставить цели, мотивировать деятельность подчиненных, организовывать и контролировать их работу с принятием на себя ответственности за результат выполнения заданий.

ОК 9. Быть готовым к смене технологий в профессиональной деятельности.

ПК 1.1. Составлять земельный баланс района.

ПК 1.3. Готовить предложения по определению экономической эффективности использования имеющегося недвижимого имущества.

ПК 2.1. Выполнять комплекс кадастровых процедур.

ПК 2.2. Определять кадастровую стоимость земель.

ПК 3.1. Выполнять работы по картографо-геодезическому обеспечению территорий, создавать графические материалы.

ПК 4.1. Осуществлять сбор и обработку необходимой и достаточной информации об объекте оценки и аналогичных объектах.

ПК 4.2. Производить расчеты по оценке объекта оценки на основе применимых подходов и методов оценки.

ПК 4.3. Обобщать результаты, полученные подходами, и давать обоснованное заключение об итоговой величине стоимости объекта оценки.

ПК 4.4. Рассчитывать сметную стоимость зданий и сооружений в соответствии с действующими нормативами и применяемыми методиками.

ПК 4.5. Классифицировать здания и сооружения в соответствии с принятой типологией.

Целью освоения учебной дисциплины «Математика» является формирование представлений о математике как универсальном языке науки, средстве моделирования явлений и процессов, об идеях и методах математики.

При выполнении практических работ студент должен **знать:**

В результате освоения дисциплины обучающийся должен

– значение математики в профессиональной деятельности и при освоении ППСЗ;

– основные математические методы решения прикладных задач в области профессиональной деятельности;

– основные понятия и методы математического анализа;

– основные понятия и методы дискретной математики;

– основные понятия и методы линейной алгебры;

– основные понятия и методы теории комплексных чисел;

– основные понятия и методы теории вероятностей и математической статистики;

– основы интегрального и дифференциального исчисления.

В результате освоения дисциплины обучающийся должен **уметь:**

решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности.

Объём практических занятий по дисциплине определяется учебным планом по данной специальности.

Продолжительность практического занятия - 2 академических часа. Перед проведением практического занятия преподавателем организуется инструктаж, а по ее окончании – обсуждение итогов.

Комплект методических указаний по выполнению практических работ дисциплины «Математика» содержит 8 практических занятий.

Перечень практических работ по дисциплине «Математика»

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №1.

Тема: «Построение графиков реальных функций».

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №2.

Тема: «Нахождение пределов функций с помощью замечательных пределов».

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №3.

Тема: «Нахождение неопределенных интегралов различными методами».

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №4.

Тема: «Действия с матрицами».

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №5.

Тема: «Решение систем линейных уравнений различными методами».

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №6.

Тема: «Комплексные числа и действия над ними».

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №7.

Тема: «Решение практических задач на определение вероятности события».

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №8.

Тема: «Решение задач с реальными дискретными дисциплинами».

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №1.

Тема: «Построение графиков реальных функций».

ЦЕЛЬ РАБОТЫ:

1. Корректировать знания, умения и навыки по теме: «Исследование функции и построение ее графика».
2. Закрепить и систематизировать знания по теме.
3. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности обучающихся.

ОБОРУДОВАНИЕ: инструкционно-технологические карты, таблицы производных элементарных функций, микрокалькуляторы.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ:

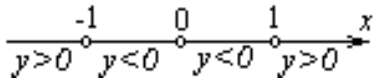
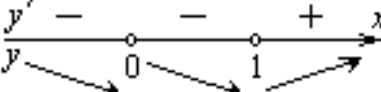
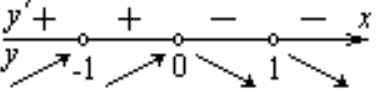
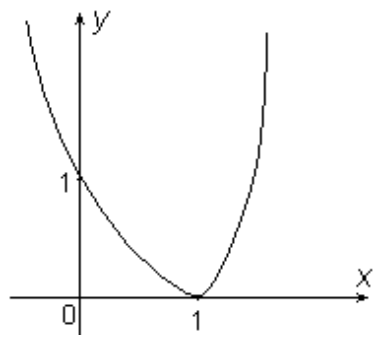
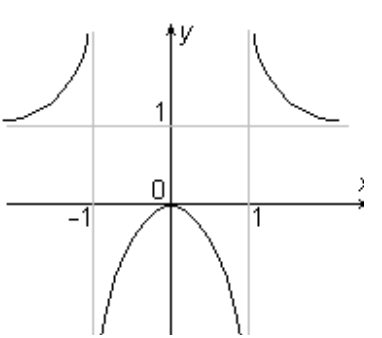
1. Ответить на контрольные вопросы:
 - а) Какую точку называют критической (стационарной) точкой функции?
 - б) Сформулируйте признак возрастания (убывания) функции.
 - в) Сформулируйте признак максимума (минимума) функции.
 - г) Опишите схему исследования функции.
2. С помощью обучающей таблицы повторить план исследования функции и изучить образцы решенных примеров.
3. Выполнить задания для самоконтроля (в таблице).
4. Изучить условие заданий для практической работы.
5. Оформить отчет о работе.

ОБУЧАЮЩАЯ ТАБЛИЦА

Задание. Исследуйте и постройте графики функции:

а) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 1$; б) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$.

№ шага	План исследования Функции	Применение плана	
		а) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 1$	б) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$
1	Находим область определения функции	$D(f) = R$	$x^2 - 1 = 0, x = \pm 1,$ $D(f) = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup$ $\cup (1; +\infty)$
2	Исследуем функцию на четность, нечетность	$f(-x) = 3x^4 + 4x^3 + 1 \neq \pm f(x)$ \Rightarrow функция ни четная, ни нечетная	$f(-x) = \frac{x^2}{x^2 - 1} = f(x) \Rightarrow$ функция четная

3	Находим нули (корни) функции и промежутки её знакопостоянства	$3x^4 - 4x^3 + 1 = 0, (3x^4 - 3x^3) - (x^3 - 1) = 0,$ $(x-1)^2(3x^2 + 2x + 1) = 0,$ $x-1=0, x=1$ - нуль функции	$\frac{x^2}{x^2-1} = 0,$ $x=0$ - нуль функции 
4	Находим производную функции и её критические точки	$f'(x) = (3x^4 - 4x^3 + 1)' = 12x^3 - 12x^2 = 12x^2(x-1),$ $f'(x) = 0 \Rightarrow x=0, 1$ - критические точки функции	$f'(x) = \left(\frac{x^2}{x^2-1} \right)' =$ $= \frac{2x(x^2-1) - 2x^3}{(x^2-1)^2} = -\frac{2x}{(x^2-1)^2}$ $f'(x) = 0 \Rightarrow x=0$ - критическая точка функции
5	Находим промежутки монотонности, точки экстремума и экстремумы функции	 $y'(-1) < 0, y'(0,5) < 0, y'(2) > 0$ $x=0$ - не является точкой экстремума, $x=1$ - точка минимума, $y_{min} = y(1) = 0$	 $y'(-2) > 0, y'(-0,5) > 0,$ $y'(0,5) < 0, y'(2) < 0,$ $x=0$ - точка максимума, $y_{max} = y(0) = 0$
6	Находим предел функции при $x \rightarrow \pm\infty$	$\lim_{\Delta x \rightarrow \pm\infty} (3x^4 - 4x^3 + 1) = \infty$	$\lim_{\Delta x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2-1} = 1$
7	Строим эскиз графика функции		

Примеры. Исследуйте и постройте графики функций:

$$1) y = x^2 - 3x + 2; \quad 2) y = 2x^2 - x^4 - 1; \quad 3) y = 6x - x^2 - 5; \quad 4) y = \frac{x^2}{2} + \frac{8}{x^2}; \quad 5) \\ y = 3x - x^3; \quad 6) y = x^3 - 3x^2 + 4; \quad 7) y = x^3 - 3x + 1; \quad 8) y = \frac{(x-3)^2}{x^2}; \quad 9) y = x^2 + \frac{1}{x}$$

ВАРИАНТЫ ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЫ.

Вариант 1.

1. Исследуйте функцию $f(x) = \frac{x}{2} - x^4$ на максимум и минимум.
2. Исследуйте с помощью производной функцию $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5$ и постройте ее график.

Вариант 2.

1. Исследуйте функцию $f(x) = x^3 - 3x$ на максимум и минимум.
2. Исследуйте с помощью производной функцию $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 1,5x^2$ и постройте ее график.

Вариант 3.

1. Исследуйте функцию $f(x) = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 5$ на максимум и минимум.
2. Исследуйте с помощью производной функцию $f(x) = 2x^3 - 3x^2$ и постройте ее график.

Вариант 4.

1. Исследуйте функцию $f(x) = 12x - x^3$ на максимум и минимум.
2. Исследуйте с помощью производной функцию $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{5}x^5$ и постройте ее график.

Вариант 5.

1. Исследуйте функцию $f(x) = 3x^4 - 6x^2 + 4$ на максимум и минимум.
2. Исследуйте с помощью производной функцию $f(x) = -x^3 + 3x + 2$ и постройте ее график.

Вариант 6.

1. Исследуйте функцию $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 2x + 1$ на максимум и минимум.
2. Исследуйте с помощью производной функцию $f(x) = x^3 - 3x$ и постройте ее график.

Вариант 7.

1. Исследуйте функцию $f(x) = x^3 - x^4$ на максимум и минимум.
2. Исследуйте с помощью производной функцию $f(x) = -x^4 + 5x^2 + 4$ и постройте ее график.

Вариант 8.

1. Исследуйте функцию $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2 + 5$ на максимум и минимум.

2. Исследуйте с помощью производной функцию $f(x) = x^3 - x^2$ и постройте ее график.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №2.

Тема: «Нахождение пределов функций с помощью замечательных пределов».

ЦЕЛЬ РАБОТЫ:

1. Корректировать знания, умения и навыки по теме: «Нахождение пределов функций с помощью замечательных пределов».
2. Закрепить и систематизировать знания по теме.
3. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности обучающихся.

ОБОРУДОВАНИЕ: инструкционно-технологические карты, микрокалькуляторы.

Справочный материал.

1. Основные теоремы о пределах

$$\lim(x + y) = \lim x + \lim y; (1)$$

$$\lim(x - y) = \lim x - \lim y; (1^*), \text{ то из условий } (1) \text{ и } (1^*) \Rightarrow \lim(x \pm y) = \lim x \pm \lim y;$$

$$\lim(xy) = \lim x \lim y; (2) \quad \lim(x^m) = (\lim x)^m (3) \quad \lim \sqrt[m]{x} = \sqrt[m]{\lim x}, (4)$$

$$\lim \frac{x}{y} = \frac{\lim x}{\lim y}, \text{ если } \lim y \neq 0 (5) \quad \lim(\log_a x) = \log_a(\lim x) (6)$$

Запомните, что

$$\lim \frac{\sin x}{x} = 1, \text{ при } x \rightarrow 0 \text{ (Первый замечательный предел)}$$

$\lim (1 + \frac{1}{n})^n = e$, при $n \rightarrow \infty$ - число e ; $e \approx 2,71828$ — основание натуральных логарифмов; (логарифм числа x по основанию e называется натуральным логарифмом и обозначается **$\ln x$**).

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e; \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e \quad (\text{второй замечательный предел})$$

При $x \rightarrow \infty$; или при $\alpha \rightarrow 0$.

2. Рассмотрите решение следующих примеров:

Пример 1. Найти $\lim (x^4 - 3x^2 + 16x + 1)$, при $x \rightarrow -1$

Решение. $\lim (x^4 - 3x^2 + 16x + 1) = (\lim x^4 - \lim 3x^2 + 16x + 1) = [(\lim x)^4 - 3(\lim x)^2 + 16\lim x + 1] =$

$$= (-1)^4 - 3(-1)^2 + 16(-1) + 1 = -17 \quad \text{Ответ. } -17.$$

Примечание. Для нахождения предела целого или дробного рационального алгебраического выражения, если предел знаменателя не равен нулю, надо переменную x заменить ее пределом и произвести указанные в выражении действия. Например,

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - x - 5}{x^3 + x + 1} = \frac{2 \cdot 2^2 - 2 - 5}{2^3 + 2 + 1} = \frac{1}{11}$$

Пример 2. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3 + 2x^2}{5x^3 - 3x^2}$

Решение. Применить теорему о пределе дроби (частного) нельзя, т.к. при $x \rightarrow 0$

$$\lim (5x^3 - 3x^2) = 0$$

До перехода к пределу следует упростить данную дробь:

$$\frac{2x^3 + 2x^2}{5x^3 - 3x^2} = \frac{2x^2(x+1)}{x^2(5x-3)} = \frac{2(x+1)}{5x-3}$$

Предел знаменателя

$$\lim_{x \rightarrow 0} (5x - 3) = \lim_{x \rightarrow 0} (5x) - 3 = 0 - 3 = -3 \quad -3 \neq 0$$

Применяя теперь теорему о пределе дроби (частного), получим:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3 + 2x^2}{5x^3 - 3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2(x+1)}{x^2(5x-3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(x+1)}{5x-3} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} 2(x+1)}{\lim_{x \rightarrow 0} 5x-3} = \frac{2 \lim_{x \rightarrow 0} (x+1)}{5 \lim_{x \rightarrow 0} (x-3)} = -\frac{2}{3}$$

Ответ. $-2/3$

Пример 3: Найти $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{3x+1}$

Решение. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{3x+1} = \frac{5}{\lim_{x \rightarrow \infty} 3x+1} = \frac{5}{3 \lim_{x \rightarrow \infty} x+1} = \frac{5}{\infty} = 0 \quad \text{Ответ. } 0.$

Пример 4. Найти $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 1}{2x^3 + 1}$

Решение. Числитель и знаменатель дроби превращаются в бесконечность, а их отношение не имеет смысла. Поэтому преобразуем дробь, разделив числитель и знаменатель дроби на наивысшую степень аргумента, т.е. на x^3 .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 1}{2x^3 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{x^3}}{2 + \frac{1}{x^3}} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x^3})}{\lim_{x \rightarrow \infty} (2 + \frac{1}{x^3})} = \frac{1}{2} \quad \text{Ответ. } 1/2.$$

Пример 5. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x}$

Решение. Применить теорему о пределе дроби нельзя, т.к. предел знаменателя равен нулю.

Перепишем данное выражение так:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \sin 4x}{4x} = 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{4x}, \quad \text{Применяя формулу } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \text{ получим:}$$
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x} = 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{4x} = 4 * 1 = 4 \quad \text{Ответ. } 4.$$

Пример 6. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{5}}{x^2 - x - 20}$

Решение. применить теорему о пределе частного нельзя, т.. при $x=5$ числитель и знаменатель обращаются в нуль. Перепишем данную дробь в виде

$$\frac{\sqrt{x} - \sqrt{5}}{x^2 - x - 20} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{5}}{(x+4)(x-5)} - \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{5})(\sqrt{x} + \sqrt{5})}{(x+4)(x-5)(\sqrt{x} + \sqrt{5})} = \frac{x-5}{(x+4)(x-5)(\sqrt{x} + \sqrt{5})},$$

Переходя к пределу, получим:

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{5}}{x^2 - x - 20} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{(x+4)(\sqrt{x} + \sqrt{5})} = \frac{1}{18\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{90}$$
$$\text{Либо: } \frac{\sqrt{x} - \sqrt{5}}{x^2 - x - 20} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{5}}{(x+4)(x-5)} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{5}}{(x+4)(\sqrt{x} - \sqrt{5})(\sqrt{x} + \sqrt{5})} = \frac{1}{(x+4)(\sqrt{x} + \sqrt{5})}.$$

Ответ. $\frac{\sqrt{5}}{90}$

3. Вычисление пределов и раскрытие неопределенностей вида $\left[\frac{0}{0}\right], \left[\frac{\infty}{\infty}\right], [1^\infty]$.

$$1. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 5x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x \cos 5x}{\sin 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x) 3x 5x \cos(5x)}{3x \sin(5x) 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x \cos 5x}{5x} = \frac{3}{5}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2-1}{5x^2+2x} \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{1}{x^2}}{5 + \frac{2}{x}} = \frac{3}{5}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3+5x}{x+10} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{5}{x^2}}{\frac{1}{x^2} + \frac{10}{x^3}} = \frac{1}{0} = \infty$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+6}{x^4+10} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^2} + \frac{6}{x^4}}{1 + \frac{10}{x^4}} = \frac{0}{1} = 0$$

$$6. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x+5} \right)^{2x+1} = (1^\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x+5} \right)^{x+5} \right]^{\frac{2x+1}{x+5}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{2x+1}{x+5}} = e^2$$

3. Вычислить следующие пределы:

$$1. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-5}{x^2-25} = \left[\frac{0}{0} \right]$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 7} \frac{x-7}{(x^2-49)}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow -5} \frac{1}{x+5}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 5x} = \left[\frac{0}{0} \right]$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sin 5x}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 8x}{x}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2-1}{5x^2+2x} \left[\frac{\infty}{\infty} \right]$$

$$8. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3+3x^2-8}{5x^3-7x+3}$$

$$9. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3+5x}{x+10} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right]$$

$$10. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+15}{x^4+7}$$

$$11. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+6}{x^4+10} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right]$$

$$12. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5-5x^4+9}{4x^5+2x^3-7}$$

$$13. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+5} \right)^{2n} = (1^\infty)$$

$$14. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{4}{n} \right)^n \right]^2$$

$$15. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x+5} \right)^x$$

$$16. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+9}{x} \right)^x$$

4. Оформить отчет и сдать на проверку

5. Домашнее задание. Решить (на выбор) любые 2 задачи с последующим объяснением на занятиях

1. Масса движущегося тела определяется соотношением $m(\beta) = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$ и $\beta = \frac{v}{c}$ -

отношение скорости тела к скорости света. Покажите, что в предельном переходе при $\beta \rightarrow 0$ массу можно считать постоянной и равной m_0 .

2. Интервал времени между двумя событиями зависит от скорости движения системы,

где эти события происходят, следующим образом:

$$\Delta t(v) = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}; \text{ При } v \rightarrow c \text{ найдите предел функции } \Delta t(v) \text{ и сделайте}$$

вывод, считая, например, что Δt_0 - продолжение жизни близнеца, оставшегося на Земле, а Δt - продолжительность жизни его брата, отправившегося в космическое путешествие.

3. Значение кинетической энергии тела выражается формулой

$$E_{kin}(\beta) = \frac{m_0 v^2}{1 + \sqrt{1-\beta^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c}. \text{ Найдите предел этой функции,}$$

т.е. получите классическую формулу для кинетической энергии, если $\beta \rightarrow 0$.

4. Сила давления летчика, совершающего «мертвую петлю», на сиденье в момент достижения верхней точки «мертвой петли» выражается формулой $\varphi = m(a - g)$, где $a = v^2/r$ - центростремительное (нормальное) ускорение, r - радиус петли. Рассматривая данные выражения как функцию центростремительного ускорения, докажите, что при предельном переходе $a \rightarrow g$ летчик испытывает состояние невесомости.

5. Сила давления летчика на сиденье в нижней точке «мертвой петли» определяется формулой $Q = m(g + v^2/r)$, m - масса летчика, $g = 9,8 \text{ м/с}^2$.

Рассматривая данное выражение как функцию от r , найдите ее предел при: а) $r \rightarrow \infty$; б) $r \rightarrow 0$. Сделайте соответствующие выводы.

6. В падающем с ускорением a лифте тело давит на пол кабины с силой $P = m(a - g)$, g - ускорение свободного падения. Рассматривая данный процесс как функцию от a , найдите ее предел при а) $a \rightarrow g$; б) $a \rightarrow 0$.

Сделайте выводы.

Таблица ответов

№ Зада-	1 зада	2 задача	3 задача	4 задание
------------	-----------	-------------	----------	-----------

ния	ча			1	2	3	4	5	6	7
Максимальное количество баллов	3	3	3	1	1	1	2	2	2	2
Набранные баллы										
	4 задание									
№ Зада-ния	8	9	10	11	12	13	14	15	16	Сумма баллов
Максимальное количество баллов	2	2	2	2	2	3	3	4	4	44
Набранные баллы										

Таблица перевода баллов в оценку

Набранное количество баллов	Оценка
0 - 15	2 (неудовлетворительно)
16 - 30	3 (удовлетворительно)
31 - 38	4 (хорошо)
39 - 44	5(отлично)

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №3.

Тема: «Нахождение неопределенных интегралов различными методами»

ЦЕЛЬ РАБОТЫ:

- 1.Корректировать знания, умения и навыки по теме: «Неопределенный интеграл.
2. Метод интегрирования подстановкой (заменой переменной)».
3. Закрепить и систематизировать знания по теме.
4. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности обучающихся.

ОБОРУДОВАНИЕ: инструкционно-технологические карты, таблицы первообразных некоторых функций, микрокалькуляторы.

Справочный материал:

1. Свойства неопределенного интеграла:

$$1. \left(\int f(x) dx \right)' = (F(x) + C)' = f(x);$$

$$2. d\left(\int f(x) dx \right) = f(x) dx;$$

$$3. \int dF(x) = F(x) + C;$$

$$4. \int (u + v - w) dx = \int u dx + \int v dx - \int w dx; \text{ где } u, v, w - \text{некоторые функции от } x.$$

$$\int C \cdot f(x) dx = C \cdot \int f(x) dx;$$

2. Таблица основных интегралов.

Интеграл		Значение	Интеграл		Значение
1	$\int \operatorname{tg} x dx$	$+C \mid \cos x \mid \cdot \ln$	9	$\int e^x dx$	$e^x + C$
2	$\int \operatorname{ctg} x dx$	$+ C \mid \sin x \mid \ln$	10	$\int \cos x dx$	$\sin x + C$
3	$\int a^x dx$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$	11	$\int \sin x dx$	$-\cos x + C$
4	$\int \frac{dx}{a^2 + x^2}$	$\frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$	12	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx$	$\operatorname{tg} x + C$
5	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2}$	$\frac{1}{2a} \ln \left \frac{x+a}{x-a} \right + C$	13	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx$	$-\operatorname{ctg} x + C$
6		\ln	14		

	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$	$\left x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right + C$		$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$	$\arcsin \frac{x}{a} + C$
7	$\int x^\alpha dx$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$	15	$\int \frac{1}{\cos x} dx$	$\ln \left \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right + C$
8	$\int \frac{dx}{x}$	$\ln x + C$	16	$\int \frac{1}{\sin x} dx$	$\ln \left \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right + C$

3. Способ подстановки (замены переменных).

Теорема: Если требуется найти интеграл $\int f(x)dx$ (t) и ф, но сложно отыскать первообразную, то с помощью замены $x = (t)dt$ получается: $\int f(x)dx =$

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Пример 1.

Найти неопределенный интеграл $\int \sqrt{\sin x} \cos x dx$.

Сделаем замену $t = \sin x, dt = \cos x dx$.

$$\int \sqrt{t} dt = \int t^{1/2} dt = \frac{2}{3} t^{3/2} + C = \frac{2}{3} \sin^{3/2} x + C.$$

Пример 2. $\int x(x^2 + 1)^{3/2} dx$.

Замена $t = x^2 + 1; dt = 2x dx; dx = \frac{dt}{2x}$; Получаем:

$$\int t^{3/2} \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \int t^{3/2} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} t^{5/2} + C = \frac{t^{5/2}}{5} + C = \frac{(x^2 + 1)^{5/2}}{5} + C;$$

Содержание работы:

Вариант 1

$$1. y = \int x^3 - x^2 + \frac{1}{x^2} dx$$

$$2. y = \int \sqrt[3]{x} dx$$

$$3. y = \int \left(\frac{2+x}{x}\right)^2 dx$$

$$4. y = \int \frac{x^2 + \sqrt{x^3 + 3}}{\sqrt{x}} dx$$

$$5. y = \int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$6. y = \int \frac{e^x dx}{1 + e^x}$$

$$7. y = \int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}} dx$$

$$8. y = \int \ln x dx$$

$$9. y = \int x * \sin 2x dx$$

Вариант 2

$$1. y = \int 4x^3 + 3x^2 - 3 + \frac{1}{x^4} dx$$

$$2. y = \int 2\sqrt{x^3} dx$$

$$3. y = \int \left(\frac{x+1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$$

$$4. y = \int \frac{3x^5 + 4x^2 - 2}{x^3} dx$$

$$5. y = \int \frac{(6x - 5) dx}{\sqrt{3x^2 - 5x + 6}}$$

$$6. y = \int e^{x^2} x dx$$

$$7. y = \int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x}$$

$$8. y = \int x * e^x dx$$

$$9. y = \int \arcsin x dx$$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №4.

Тема: «Действия с матрицами».

ЦЕЛЬ РАБОТЫ:

1. Повторить знания по теме: «Матрицы. Действия над матрицами».
2. Организовать деятельность обучающихся по переводу своих знаний от усвоения отдельных фактов и понятий к их обобщению в целостную систему знаний.
3. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности обучающихся.

ОБОРУДОВАНИЕ: инструкционно -технологические карты, справочные пособия, микрокалькуляторы.

Справочный материал:

1. Умножение матрицы на число.

Пример:

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 12 & 3 \cdot (-1) \\ 3 \cdot 7 & 3 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 & -3 \\ 21 & 0 \end{pmatrix}$$

Для того чтобы умножить матрицу на число, нужно **каждый** элемент матрицы умножить на это число.

2. Сумма (разность) матриц.

Для выполнения сложения (вычитания) матриц, необходимо, чтобы они были одинаковыми по размеру.

Для того чтобы сложить матрицы, необходимо сложить их соответствующие элементы:

$$\begin{aligned} F + G &= \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 15 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 + (-4) & -1 + (-3) \\ -5 + 15 & 0 + 7 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 12 - 4 & -1 - 3 \\ -5 + 15 & 0 + 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 10 & 7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Для разности матриц правило аналогичное, необходимо найти разность соответствующих элементов.

Пример:

Найти разность матриц $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -17 \\ -1 & 0 & 10 \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -15 \\ -5 & -7 & 0 \end{pmatrix}$

$$A - H = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -17 \\ -1 & 0 & 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 & 3 & -15 \\ -5 & -7 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - (-4) & 5 - 3 & -17 - (-15) \\ -1 - (-5) & 0 - (-7) & 10 - 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 + 4 & 5 - 3 & -17 + 15 \\ -1 + 5 & 0 + 7 & 10 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 4 & 7 & 10 \end{pmatrix}$$

3. Умножение матриц.

Чтобы матрицу K можно было умножить на матрицу L нужно, чтобы число столбцов матрицы K равнялось числу строк матрицы L .

Пример 1:

Умножить матрицу $K = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ на матрицу $L = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$
 Формула умножения для конкретного случая:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 c_1 + b_1 c_2 \\ a_2 c_1 + b_2 c_2 \end{pmatrix}$$

$$KL = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) \\ 5 \cdot 3 + 4 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Пример 2:

Умножить матрицу $M = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$ на матрицу $N = \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$

Формула: $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 c_1 + b_1 c_2 & a_1 d_1 + b_1 d_2 \\ a_2 c_1 + b_2 c_2 & a_2 d_1 + b_2 d_2 \end{pmatrix}$

$$MN = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 9 - 3 \cdot 6 & 2 \cdot (-6) - 3 \cdot (-4) \\ 4 \cdot 9 - 6 \cdot 6 & 4 \cdot (-6) - 6 \cdot (-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

В результате получена так называемая нулевая матрица.

Пример 3:

Умножить матрицу $P = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix}$ на матрицу $R = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Формула:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 d_1 + b_1 d_2 + c_1 d_3 \\ a_2 d_1 + b_2 d_2 + c_2 d_3 \\ a_3 d_1 + b_3 d_2 + c_3 d_3 \end{pmatrix}$$

$$PR = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 2 + 8 \cdot (-3) - 4 \cdot 1 \\ 6 \cdot 2 + 9 \cdot (-3) - 5 \cdot 1 \\ 4 \cdot 2 + 7 \cdot (-3) - 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ -20 \\ -16 \end{pmatrix}$$

Содержание работы:

Вариант № .1

1. Найти матрицу; $3A-B$ если

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Вычислить произведение матриц:

$$1) \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$2) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 12 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Вариант № 2.

1. Найти матрицу: $A+2B$, если

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Вычислить произведение матриц:

$$1) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2) \begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №5.

Тема: «Решение систем линейных уравнений различными методами».

ЦЕЛЬ РАБОТЫ:

1. Повторить знания по теме: «Решить систему линейных уравнений методом Гаусса».
2. Организовать деятельность обучающихся по переводу своих знаний от усвоения отдельных фактов и понятий к их обобщению в целостную систему знаний.
3. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности обучающихся.

ОБОРУДОВАНИЕ: инструкционно -технологические карты, справочные пособия, микрокалькуляторы.

Справочный материал:

Система линейных уравнений может:

- 1) Иметь единственное решение.
- 2) Иметь бесконечно много решений.
- 3) Не иметь решений (быть несовместной).

Метод Гаусса – наиболее мощный и универсальный инструмент для нахождения решения любой системы линейных уравнений. [Правило Крамера и матричный метод](#) непригодны в тех случаях, когда система имеет бесконечно много решений или несовместна.

Пусть дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} x - y = -5 \\ 2x + y = -7 \end{cases} \text{ решим ее методом Гаусса.}$$

На первом этапе нужно записать расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{array} \right).$$
 По какому принципу записаны коэффициенты, думаю, всем видно.

Вертикальная черта внутри матрицы не несёт никакого математического смысла – это просто отчеркивание для удобства оформления.

Справка: рекомендую запомнить термины линейной алгебры. Матрица системы – это матрица, составленная только из коэффициентов при неизвестных, в данном

примере матрица системы: $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Расширенная матрица системы – это та же

матрица системы плюс столбец свободных членов, в данном случае: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{array} \right).$

Любую из матриц можно для краткости называть просто матрицей.

После того, как расширенная матрица системы записана, с ней необходимо выполнить некоторые действия, которые также называются элементарными преобразованиями.

Существуют следующие элементарные преобразования:

- 1) Строки матрицы можно переставлять местами. Например, в рассматриваемой матрице можно безболезненно переставить первую и вторую

строки: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & -7 \\ 1 & -1 & -5 \end{array} \right)$

- 2) Если в матрице есть (или появились) пропорциональные (как частный случай – одинаковые) строки, то следует удалить из матрицы все эти строки кроме одной.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 4 & 6 \end{array}\right)$$

Рассмотрим, например матрицу $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 4 & 6 \end{array}\right)$. В данной матрице последние три строки пропорциональны, поэтому достаточно оставить только одну из

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 4 & 6 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

них:

3) Если в матрице в ходе преобразований появилась нулевая строка, то ее также следует удалить. Рисовать не буду, понятно, нулевая строка – это строка, в которой одни нули.

4) Строку матрицы можно умножить (разделить) на любое число, отличное от

нуля. Рассмотрим, например, матрицу $\left(\begin{array}{cc|c} -3 & 9 & 15 \\ 0,5 & 0 & 2,5 \end{array}\right)$. Здесь целесообразно первую

строку разделить на -3 , а вторую строку – умножить на 2 : $\left(\begin{array}{cc|c} -3 & 9 & 15 \\ 0,5 & 0 & 2,5 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -5 \\ 1 & 0 & 5 \end{array}\right)$. Данное действие очень полезно, поскольку упрощает дальнейшие преобразования матрицы.

5) Это преобразование вызывает наибольшие затруднения, но на самом деле ничего сложного тоже нет. К строке матрицы можно прибавить другую строку, умноженную на число, отличное от нуля. Рассмотрим нашу матрицу из

практического примера: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right)$. Сначала я распишу преобразование очень

подробно. Умножаем первую строку на -2 : $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 10 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right)$, и ко второй строке прибавляем первую строку умноженную на $-$

2: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 10 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 10 \\ 0 & 3 & 3 \end{array}\right)$. Теперь первую строку можно разделить

«обратно» на -2 : $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 10 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 10 \\ 0 & 3 & 3 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 0 & 3 & 3 \end{array}\right)$. Как видите, строка, которую ПРИБАВЛЯЛИ – не изменилась. Всегда меняется строка, К КОТОРОЙ ПРИБАВЛЯЮТ.

На практике так подробно, конечно, не расписывают, а пишут короче:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 0 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

Еще раз: ко второй строке прибавили первую строку, умноженную на -2 .

Умножают строку обычно устно или на черновике, при этом мысленный ход расчётов примерно такой:

«Переписываю матрицу и переписываю первую строку: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ * & * & * \end{array}\right)$ »

«Сначала первый столбец. Внизу мне нужно получить ноль. Поэтому единицу вверху умножаю на -2 : $1 \cdot (-2) = -2$, и ко второй строке прибавляю первую: $2 + (-2)$

$= 0$. Записываю результат во вторую строку: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 0 & * & * \end{array}\right)$ »

«Теперь второй столбец. Вверху -1 умножаю на -2 : $-1 \cdot (-2) = 2$. Ко второй строке прибавляю первую: $1 + 2 = 3$. Записываю результат во вторую

строку: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 0 & 3 & * \end{array}\right)$ »

«И третий столбец. Вверху -5 умножаю на -2 : $-5 \cdot (-2) = 10$. Ко второй строке прибавляю первую: $-7 + 10 = 3$. Записываю результат во вторую

строку: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 0 & 3 & 3 \end{array}\right)$ »

Пожалуйста, тщательно осмыслите этот пример и разберитесь в последовательном алгоритме вычислений, если вы это поняли, то метод Гаусса практически «в кармане». Но, конечно, над этим преобразованием мы еще поработаем.

Элементарные преобразования не меняют решение системы уравнений

! ВНИМАНИЕ: рассмотренные манипуляции нельзя использовать, если Вам предложено задание, где матрицы даны «сами по себе». Например, при «классических» [действиях с матрицами](#) что-то переставлять внутри матриц ни в коем случае нельзя!

Вернемся к нашей системе $\begin{cases} x - y = -5 \\ 2x + y = -7 \end{cases}$. Она практически разобрана по косточкам. Запишем расширенную матрицу системы и с помощью элементарных преобразований приведем ее к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 0 & 3 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

(1) Ко второй строке прибавили первую строку, умноженную на -2 . И снова: почему первую строку умножаем именно на -2 ? Для того чтобы внизу получить ноль, а значит, избавиться от одной переменной во второй строке.

(2) Делим вторую строку на 3.

Цель элементарных преобразований – привести матрицу к ступенчатому

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

виду: . В оформлении задания прямо так и отчеркивают простым карандашом «лестницу», а также обводят кружочками числа, которые располагаются на «ступеньках». Сам термин «ступенчатый вид» не вполне теоретический, в научной и учебной литературе он часто называется трапецевидный вид или треугольный вид.

В результате элементарных преобразований получена эквивалентная исходной система уравнений:

$$\begin{cases} x - y = -5 \\ y = 1 \end{cases}$$

Теперь систему нужно «раскрутить» в обратном направлении – снизу вверх, этот процесс называется обратным ходом метода Гаусса.

В нижнем уравнении у нас уже готовый результат: $y = 1$.

Рассмотрим первое уравнение системы $x - y = -5$ и подставим в него уже известное значение «игрек»:

$$x - 1 = -5$$

$$x = -4$$

Ответ: $x = -4, y = 1$

Рассмотрим наиболее распространенную ситуацию, когда методом Гаусса требуется решить систему трёх линейных уравнений с тремя неизвестными.

Пример 1

Решить методом Гаусса систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x + 2y - 5z = -1 \\ 2x - y + 3z = 13 \\ x + 2y - z = 9 \end{cases}$$

Запишем расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array} \right)$$

Сейчас я сразу нарисую результат, к которому мы придём в ходе решения:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right)$$

И повторяю, наша цель – с помощью элементарных преобразований привести матрицу к ступенчатому виду. С чего начать действия?

Сначала смотрим на левое верхнее число:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \textcircled{3} & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array} \right)$$

Почти всегда здесь должна находиться единица. Вообще говоря, устроит и -1 (а иногда и другие числа), но как-то так традиционно сложилось, что туда обычно помещают единицу. Как организовать единицу? Смотрим на первый столбец – готовая единица у нас есть! Преобразование первое: меняем местами первую и третью строки:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array} \right)$$

Теперь первая строка у нас останется неизменной до конца решения. Уже легче. Единица в левом верхнем углу организована. Теперь нужно получить нули вот на этих местах:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ \textcircled{2} & -1 & 3 & 13 \\ \textcircled{3} & 2 & -5 & -1 \end{array} \right)$$

Нули получаем как раз с помощью «трудного» преобразования. Сначала разбираемся со второй строкой $(2, -1, 3, 13)$. Что нужно сделать, чтобы на первой позиции получить ноль? Нужно ко второй строке прибавить первую строку, умноженную на -2 . Мысленно или на черновике умножаем первую строку на -2 : $(-2, -4, 2, -18)$. И последовательно проводим (опять же мысленно или на черновике) сложение, ко второй строке прибавляем первую строку, уже умноженную на -2 :

$$\begin{array}{cccc} 0 & -5 & 5 & -5 \\ \parallel & \parallel & \parallel & \parallel \\ -2 & -4 & 2 & -18 \\ + & + & + & + \\ 2 & -1 & 3 & 13 \end{array}$$

Результат записываем во вторую строку:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array} \right)$$

Аналогично разбираемся с третьей строкой $(3, 2, -5, -1)$. Чтобы получить на первой позиции ноль, нужно к третьей строке прибавить первую строку, умноженную на -3 . Мысленно или на черновике умножаем первую строку на -3 :

$(-3, -6, 3, -27)$. И к третьей строке прибавляем первую строку, умноженную на -3 :

$$\begin{array}{cccc} 0 & -4 & -2 & -28 \\ \parallel & \parallel & \parallel & \parallel \\ -3 & -6 & 3 & -27 \\ + & + & + & + \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}$$

Результат записываем в третью строку:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & -2 & -28 \end{array}\right)$$

На практике эти действия обычно выполняются устно и записываются в один шаг:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & -2 & -28 \end{array}\right)$$

Не нужно считать всё сразу и одновременно. Порядок вычислений и «вписывания» результатов последователен и обычно такой: сначала переписываем первую строку, и пыхтим себе потихонечку – ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНО и ВНИМАТЕЛЬНО:

$$\begin{aligned} &\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & * & * & * \\ * & * & * & * \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & * & * \\ * & * & * & * \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & * \\ * & * & * & * \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ * & * & * & * \end{array}\right) \rightarrow \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & * & * & * \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & * & * \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & -2 & * \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & -2 & -28 \end{array}\right) \end{aligned}$$

А мысленный ход самих расчётов я уже рассмотрел выше.

Далее нужно получить единицу на следующей «ступеньке»:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & -2 & -28 \end{array}\right)$$

В данном примере это сделать легко, вторую строку делим на -5 (поскольку там все числа делятся на 5 без остатка). Заодно делим третью строку на -2 , ведь чем меньше числа, тем проще решение:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & -2 & -28 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 14 \end{array}\right)$$

На заключительном этапе элементарных преобразований нужно получить еще один ноль здесь:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 14 \end{array}\right)$$

Для этого к третьей строке прибавляем вторую строку, умноженную на -2 :

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right) &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & -2 & -28 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 14 \end{array}\right) \rightarrow \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 12 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \end{aligned}$$

Попробуйте разобрать это действие самостоятельно – мысленно умножьте вторую строку на -2 и проведите сложение.

Последнее выполненное действие – причёска результата, делим третью строку на 3.

В результате элементарных преобразований получена эквивалентная исходной система линейных уравнений:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 9 \\ y - z = 1 \\ z = 4 \end{cases}$$

Круто.

Теперь в действие вступает обратный ход метода Гаусса. Уравнения «раскручиваются» снизу-вверх.

В третьем уравнении у нас уже готовый результат: $z = 4$

Смотрим на второе уравнение: $y - z = 1$. Значение «зет» уже известно, таким образом:

$$y - 4 = 1$$

$$y = 5$$

И, наконец, первое уравнение: $x + 2y - z = 9$. «Игрек» и «зет» известны, дело за малым:

$$x + 2 \cdot 5 - 4 = 9$$

$$x + 6 = 9$$

$$x = 3$$

Ответ: $x = 3, y = 5, z = 4$

Как уже неоднократно отмечалось, для любой системы уравнений можно и нужно сделать проверку найденного решения, благо, это несложно и быстро.

Пример 2

Решить систему линейных уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x - y + 2z = 6 \\ x + y + 5z = -1 \end{cases}$$

Это пример для самостоятельного решения, образец чистового оформления и ответ в конце урока.

Следует отметить, что ваш ход решения может не совпасть с моим ходом решения, и это – особенность метода Гаусса. Но вот ответы обязательно должны получиться одинаковыми!

Пример 3

Решить систему линейных уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 5x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

Запишем расширенную матрицу системы и с помощью элементарных преобразований приведем ее к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \end{array} \right)$$

Смотрим на левую верхнюю «ступеньку». Там у нас должна быть единица. Проблема состоит в том, что в первом столбце единиц нет вообще, поэтому перестановкой строк ничего не решить. В таких случаях единицу нужно организовать с помощью элементарного преобразования. Обычно это можно сделать несколькими способами. Я поступил так:

(1) К первой строке прибавляем вторую строку, умноженную на -1 . То есть, мысленно умножили вторую строку на -1 и выполнили сложение первой и второй строки, при этом вторая строка у нас не изменилась.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & -1 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \end{array} \right)$$

Теперь слева сверху «минус один», что нас вполне устроит. Кто хочет получить $+1$, может выполнить дополнительное телодвижение: умножить первую строку на -1 (сменить у неё знак).

Дальше алгоритм работает уже по накатанной колее:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 3 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{(4)} \\ \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{(5)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) Ко второй строке прибавили первую строку, умноженную на 5. К третьей строке прибавили первую строку, умноженную на 3.

(3) Первую строку умножили на -1 , в принципе, это для красоты. У третьей строки также сменили знак и переставили её на второе место, таким образом, на второй «ступеньке у нас появилась нужная единица.

(4) К третьей строке прибавили вторую строку, умноженную на 2.

(5) Третью строку разделили на 3.

Скверным признаком, который свидетельствует об ошибке в вычислениях (реже – об опечатке), является «плохая» нижняя строка. То есть, если бы у нас внизу

получилось что-нибудь вроде $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 11 & 23 \end{pmatrix}$, и, соответственно, $11x_3 = 23 \Rightarrow x_3 = \frac{23}{11}$, то с большой долей вероятности можно утверждать, что допущена ошибка в ходе элементарных преобразований.

Заряжаем обратный ход, в оформлении примеров часто не переписывают саму систему, а уравнения «берут прямо из приведенной матрицы». Обратный ход, напоминаю, работает, снизу-вверх. Да тут подарок получился:

$$x_3 = 1$$

$$x_2 = 3$$

$$x_1 + x_2 - x_3 = 1 \Rightarrow x_1 + 3 - 1 = 1 \Rightarrow x_1 = -1$$

Ответ: $x_1 = -1, x_2 = 3, x_3 = 1$.

Пример 4

Решить систему линейных уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} 8x_1 + 7x_2 + 3x_3 = 18 \\ -7x_1 - 4x_2 - 4x_3 = -11 \\ -6x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -15 \end{cases}$$

Это пример для самостоятельного решения, он несколько сложнее. Ничего страшного, если кто-нибудь запутается. Полное решение и образец оформления в конце урока. Ваше решение может отличаться от моего решения.

В последней части рассмотрим некоторые особенности алгоритма Гаусса.

Первая особенность состоит в том, что иногда в уравнениях системы отсутствуют некоторые переменные, например:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_2 + 4x_3 + 6 = 0 \\ x_1 + x_3 = 1 \end{cases}$$

Как правильно записать расширенную матрицу системы? В расширенной матрице системы на месте отсутствующих переменных ставим нули:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & -6 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Кстати, это довольно легкий пример, поскольку в первом столбце уже есть один ноль, и предстоит выполнить меньше элементарных преобразований.

Вторая особенность состоит вот в чём. Во всех рассмотренных примерах на «ступеньки» мы помещали либо -1 , либо $+1$. Могут ли там быть другие числа? В

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 2 \\ 2x + y - 4z = 9 \\ 6x - 5y + 2z = 17 \end{cases}$$

ряде случаев могут. Рассмотрим систему:

Здесь на левой верхней «ступеньке» у нас двойка. Но замечаем тот факт, что все числа в первом столбце делятся на 2 без остатка – и другая двойка и шестерка. И двойка слева вверху нас устроит! На первом шаге нужно выполнить следующие преобразования: ко второй строке прибавить первую строку, умноженную на -1 ; к третьей строке прибавить первую строку, умноженную на -3 . Таким образом, мы получим нужные нули в первом столбце.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -7 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & 17 \\ 0 & 12 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

Или еще такой условный пример: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -7 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & 17 \\ 0 & 12 & 2 & 1 \end{array} \right)$. Здесь тройка на второй «ступеньке» тоже нас устраивает, поскольку 12 (место, где нам нужно получить ноль) делится на 3 без остатка. Необходимо провести следующее преобразование: к третьей строке прибавить вторую строку, умноженную на -4 , в результате чего и будет получен нужный нам ноль.

Метод Гаусса универсален, но есть одно своеобразие. Уверенно научиться решать системы другими методами (методом Крамера, матричным методом) можно буквально с первого раза – там очень жесткий алгоритм. Но вот чтобы уверенно себя чувствовать в методе Гаусса, следует «набить руку», и прорешать хотя бы 5-10 десятков систем. Поэтому поначалу возможны путаница, ошибки в вычислениях, и в этом нет ничего необычного или трагического.

Дождливая осенняя погода за окном.... Поэтому для всех желающих более сложный пример для самостоятельного решения:

Пример 5

Решить методом Гаусса систему 4-х линейных уравнений с четырьмя неизвестными.

$$\begin{cases} 2x + 5y + 4z + t = 20 \\ x + 3y + 2z + t = 11 \\ 2x + 10y + 9z + 7t = 40 \\ 3x + 8y + 9z + 2t = 37 \end{cases}$$

Решения и ответы:

Пример 2: Решение: Запишем расширенную матрицу системы и с помощью элементарных преобразований приведем ее к ступенчатому виду.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 5 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 5 & 4 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 14 & -14 \end{pmatrix} \xrightarrow{(4)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Выполненные элементарные преобразования:

(1) Ко второй строке прибавили первую строку, умноженную на -2 . К третьей строке прибавили первую строку, умноженную на -1 . Внимание! Здесь может возникнуть соблазн из третьей строки вычесть первую, крайне не рекомендую вычитать – сильно повышается риск ошибки. Только складываем!

(2) У второй строки сменили знак (умножили на -1). Вторую и третью строки поменяли местами. Обратите внимание, что на «ступеньках» нас устраивает не только единица, но еще и -1 , что даже удобнее.

(3) К третьей строке прибавили вторую строку, умноженную на 5 .

(4) У второй строки сменили знак (умножили на -1). Третью строку разделили на 14 .

Обратный ход: $z = -1$

$$y - 2z = 2 \Rightarrow y + 2 = 2 \Rightarrow y = 0$$

$$x + 2y + 3z = 1 \Rightarrow x + 0 - 3 = 1 \Rightarrow x = 4$$

Ответ: $x = 4, y = 0, z = -1$.

Пример 4: Решение: Запишем расширенную матрицу системы и с помощью элементарных преобразований приведем ее к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 8 & 7 & 3 & 18 \\ -7 & -4 & -4 & -11 \\ -6 & 5 & -4 & -15 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 7 \\ -7 & -4 & -4 & -11 \\ -6 & 5 & -4 & -15 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 7 \\ 0 & 17 & -11 & 38 \\ 0 & 23 & -10 & 27 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 7 \\ 0 & 17 & -11 & 38 \\ 0 & 6 & 1 & -11 \end{pmatrix} \xrightarrow{(4)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 7 \\ 0 & -1 & -14 & 71 \\ 0 & 6 & 1 & -11 \end{pmatrix} \xrightarrow{(5)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 7 \\ 0 & -1 & -14 & 71 \\ 0 & 0 & -83 & 415 \end{pmatrix} \xrightarrow{(6)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 14 & -71 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

Выполненные преобразования:

(1) К первой строке прибавили вторую. Таким образом, организована нужная

единица на левой верхней «ступеньке».

(2) Ко второй строке прибавили первую строку, умноженную на 7. К третьей строке прибавили первую строку, умноженную на 6.

Со второй «ступенькой» всё хуже, «кандидаты» на неё – числа 17 и 23, а нам нужна либо единичка, либо -1 . Преобразования (3) и (4) будут направлены на получение нужной единицы

(3) К третьей строке прибавили вторую, умноженную на -1 .

(4) Ко второй строке прибавили третью, умноженную на -3 .

Нужная вещь на второй ступеньке получена.

(5) К третьей строке прибавили вторую, умноженную на 6.

(6) Вторую строку умножили на -1 , третью строку разделили на -83 .

Обратный ход: $x_3 = -5$

$$x_2 + 14x_3 = -71 \Rightarrow x_2 - 70 = -71 \Rightarrow x_2 = -1$$

$$x_1 + 3x_2 - x_3 = 7 \Rightarrow x_1 - 3 + 5 = 7 \Rightarrow x_1 = 5$$

Ответ: $x_1 = 5, x_2 = -1, x_3 = -5$

Пример 5: Решение: Запишем матрицу системы и с помощью элементарных преобразований приведем ее к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 & 1 & 20 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 11 \\ 2 & 10 & 9 & 7 & 40 \\ 3 & 8 & 9 & 2 & 37 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 11 \\ 2 & 5 & 4 & 1 & 20 \\ 2 & 10 & 9 & 7 & 40 \\ 3 & 8 & 9 & 2 & 37 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 11 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 4 & 5 & 5 & 18 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)} \\ \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 11 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{(4)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{(5)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Выполненные преобразования:

(1) Первую и вторую строки поменяли местами.

(2) Ко второй строке прибавили первую строку, умноженную на -2 . К третьей строке прибавили первую строку, умноженную на -2 . К четвертой строке прибавили первую строку, умноженную на -3 .

(3) К третьей строке прибавили вторую, умноженную на 4. К четвертой строке прибавили вторую, умноженную на -1 .

(4) У второй строки сменили знак. Четвертую строку разделили на 3 и поместили вместо третьей строки.

(5) К четвертой строке прибавили третью строку, умноженную на -5 .

Обратный ход:

$$t = 0$$

$$z = 2$$

$$y+t=2 \Rightarrow y=2$$

$$x+3y+2z+t=11 \Rightarrow x+6+4+0=11 \Rightarrow x=1$$

Ответ: $x=1, y=2, z=2, t=0$

Содержание работы:

Вариант № 1.

Решить систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$1. \quad \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 3 \end{cases}$$

$$2. \quad \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1, \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 = -1, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7. \end{cases}$$

$$3. \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases}$$

Вариант № 2.

Решить систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$1. \quad \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 10 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 3 \end{cases}$$

$$2. \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$$

$$3. \quad \begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №6.

Тема: «Комплексные числа и действия над ним».

ЦЕЛЬ РАБОТЫ:

1. Повторить знания по теме: «Действия над комплексными числами в показательной форме».
2. Организовать деятельность обучающихся по переводу своих знаний от усвоения отдельных фактов и понятий к их обобщению в целостную систему знаний.
3. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности обучающихся.

ОБОРУДОВАНИЕ: инструкционно -технологические карты, справочные пособия, микрокалькуляторы.

Справочный материал:

1. Показательная и тригонометрические функции в области комплексных чисел связаны между собой формулой

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi,$$

которая носит название формулы Эйлера.

Пусть комплексное число z в тригонометрической форме имеет вид $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. На основании формулы Эйлера выражение в скобках можно заменить на показательное выражение. В результате получим

$$z = r e^{i\varphi}.$$

Эта запись называется показательной формой комплексного числа.

Так же, как и в тригонометрической форме, здесь $r = |z|$, $\varphi = \arg z$.

2. Действия над комплексными числами в показательной форме:
 - 2.1. Произведением двух комплексных чисел называется такое комплексное число, модуль которого равен произведению модулей сомножителей, а аргумент – сумме аргументов сомножителей.

Это определение совершенно очевидно, если использовать показательную форму комплексного числа:

$$z_1 = \rho_1 e^{i\varphi_1}, \quad z_2 = \rho_2 e^{i\varphi_2}, \quad z_1 \cdot z_2 = \rho_1 e^{i\varphi_1} \cdot \rho_2 e^{i\varphi_2} = \rho_1 \cdot \rho_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

- 2.2. Модуль частного равен частному модулей делимого и делителя, а аргумент частного равен разности аргументов делимого и делителя.

$$z_1 = \rho_1 e^{i\varphi_1}, \quad z_2 = \rho_2 e^{i\varphi_2}, \quad z_1 \div z_2 = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

Пример 1: Пусть $z = -1 + i$. Напишите показательную форму числа z .

Решение. Находим модуль и аргумент числа:

$$r = |z| = \sqrt{2}, \quad \varphi = \arg z = \frac{3\pi}{4}.$$

Следовательно, показательная форма комплексного числа такова:

$$z = \sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}.$$

Пример 2: Комплексное число записано в показательной форме

$$z = 2e^{\frac{\pi}{6}i}.$$

Найдите его алгебраическую форму.

Решение. По формуле Эйлера

$$z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) = \sqrt{3} + i.$$

$$z = \sqrt{3} + i$$

Итак, алгебраическая форма числа:

Содержание работы:

Вариант 1

1. Представьте в алгебраической и тригонометрической формах числа:

- 1) $3e^{i(2\pi/3)}$;
- 2) $4e^{-i(\pi/4)}$;
- 3) e^i ;
- 4) $e^{0.1}$;
- 5) $2e^{i(\pi/2)}$.

2. Выполните действия. Результат запишите в показательной, тригонометрической и алгебраической формах:

- 1) $2e^{i(7\pi/18)} \cdot 3e^{i(11\pi/18)}$;
- 2) $e^{i(\pi/6)} \cdot 4e^{i(\pi/12)}$;
- 3) $6e^i : (3e^{-i})$.

3. Представив числа $z_1 = -1 + i\sqrt{3}$ и $z_2 = \sqrt{2}/2 - i\sqrt{2}/2$ в показательной форме, вычислите:

- 1) $z_1 \cdot z_2$;
- 2) z_1 / z_2 ;
- 3) z_2 / z_1 .

4. Выполните действия, используя показательную формулу комплексного числа:

$$\frac{(-1 + i\sqrt{3})^{15}}{(1 - i)^{20}}$$

Вариант 2

1. Представьте в алгебраической и тригонометрической формах числа:

- 1) $5e^{-i(\pi/2)}$;
- 2) $\sqrt{2}e^{i\pi}$;
- 3) $3e^{i*2\pi}$;
- 4) $6e^{1,5i}$;
- 5) $14e^{-i(17\pi/90)}$.

2. Выполните действия. Результат запишите в показательной, тригонометрической и алгебраической формах:

- 1) $4e^{i(5\pi/9)} \cdot (\sqrt{2}e^{i(\pi/9)})$;
- 2) $(\sqrt{2}e^{i(2\pi/9)})^3$;
- 3) $(2e^{i(7\pi/9)})^{10}$.

3. Представив числа $z_1 = -1 + i\sqrt{3}$ и $z_2 = \sqrt{2}/2 - i\sqrt{2}/2$ в показательной форме, вычислите:

- 1) z_1^6 ;
- 2) z_2^4 ;
- 3) z_1^{-3} .

4. Выполните действия, используя показательную формулу комплексного числа:

$$\frac{(-1-i\sqrt{3})^{15}}{(1+i)^{20}}$$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №7.

Тема: «Решение практических задач на определение вероятности события».

ЦЕЛЬ РАБОТЫ:

1. Корректировать знания, умения и навыки по теме: «Элементы комбинаторики и теории вероятностей».
2. Закрепить и систематизировать знания по теме.
3. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности обучающихся.

ОБОРУДОВАНИЕ: инструкционно-технологические карты, микрокалькуляторы.

Содержание работы:

Вариант 1.

1. Сколькими способами можно составить расписание одного учебного дня из 5 различных уроков?

- 1) 30 2) 100 3) 120 4) 5

2. В 9«Б» классе 32 учащихся. Сколькими способами можно сформировать команду из 4 человек для участия в математической олимпиаде?

- 1) 128 2) 35960 3) 36 4) 46788

3. Сколько существует различных двузначных чисел, в записи которых можно использовать цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6, если цифры в числе должны быть различными?

- 1) 10 2) 60 3) 20 4) 30

4. Вычислить: $6! - 5!$

- 1) 600 2) 300 3) 1 4) 1000

5. В ящике находится 45 шариков, из которых 17 белых. Потеряли 2 не белых шарика. Какова вероятность того, что выбранный наугад шарик будет белым?

- 1) $\frac{17}{45}$ 2) $\frac{17}{43}$ 3) $\frac{43}{45}$ 4) $\frac{17}{45}$

6. Бросают три монеты. Какова вероятность того, что выпадут два орла и одна решка?

- 1) $\frac{3}{2}$ 2) 0,5 3) 0,125 4) $\frac{1}{3}$

7. В денежно-вещевой лотерее на 1000000 билетов разыгрывается 1200 вещевых и 800 денежных выигрышей. Какова вероятность выигрыша?

- 1) 0,02 2) 0,00012 3) 0,0008 4) 0,002

Вариант 2.

1. Сколько различных пятизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5?

- 1) 100 2) 30 3) 5 4) 120

2. Имеются помидоры, огурцы, лук. Сколько различных салатов можно приготовить, если в каждый салат должно входить 2 различных вида овощей?

- 1) 3 2) 6 3) 2 4) 1

3. Сколькими способами из 9 учебных предметов можно составить расписание учебного дня из 6 различных уроков.

- 1) 10000 2) 60480 3) 56 4) 39450

4. Вычислите: $\frac{8!}{6!}$

- 1) 2 2) 56 3) 30 4) $\frac{4}{3}$

5. В игральной колоде 36 карт. Наугад выбирается одна карта. Какова вероятность, что эта карта – туз?

- 1) $\frac{1}{36}$ 2) $\frac{1}{35}$ 3) $\frac{1}{9}$ 4) $\frac{36}{4}$

6. Бросают два игровых кубика. Какова вероятность того, что выпадут две четные цифры?

- 1) 0,25 2) $\frac{2}{6}$ 3) 0,5 4) 0,125

7. В корзине лежат грибы, среди которых 10% белых и 40% рыжих. Какова вероятность того, что выбранный гриб белый или рыжий?

- 1) 0,5 2) 0,4 3) 0,04 4) 0,8

Вариант 3.

1. Сколькими способами можно расставить 4 различные книги на книжной полке?

- 1) 24 2) 4 3) 16 4) 20

2. Сколько диагоналей имеет выпуклый семиугольник?

- 1) 30 2) 21 3) 14 4) 7

3. В футбольной команде 11 человек. Необходимо выбрать капитана и его заместителя. Сколькими способами это можно сделать?

- 1) 22 2) 11 3) 150 4) 110

4. Сократите дробь: $\frac{n!}{(n+1)!}$

- 1) 1 2) $\frac{n}{n+1}$ 3) $\frac{1}{n+1}$ 4) $\frac{2}{n+1}$

5. Какова вероятность, что при одном броске игрального кубика выпадает число очков, равное четному числу?

- 1) $\frac{1}{6}$ 2) 0,5 3) $\frac{1}{3}$ 4) 0,25

6. Катя и Аня пишут диктант. Вероятность того, что Катя допустит ошибку, составляет 60%, а вероятность ошибки у Ани составляет 40%. Найти вероятность того, что обе девочки напишут диктант без ошибок.

- 1) 0,25 2) 0,4 3) 0,48 4) 0,2

7. Завод выпускает 15% продукции высшего сорта, 25% - первого сорта, 40% - второго сорта, а все остальное – брак. Найти вероятность того, что выбранное изделие не будет бракованным.

- 1) 0,8 2) 0,1 3) 0,015 4) 0,35

Вариант 4

1. Сколькими способами могут встать в очередь в билетную кассу 5 человек?

- 1) 5 2) 120 3) 25 4) 100

2. Сколькими способами из 25 учеников класса можно выбрать четырех для участия в праздничном концерте?

- 1) 12650 2) 100 3) 75 4) 10000

3. Сколько существует трехзначных чисел, все цифры. Которых нечетные и различные.

- 1) 120 2) 30 3) 50 4) 60

4. Упростите выражение: $\frac{(n+1)!}{(n-2)!}$

- 1) 0,5 2) $\frac{n+1}{n-2}$ 3) $n^3 - n$ 4) $n^2 - 1$

5. Какова вероятность, что ребенок родится 7 числа?

- 1) $\frac{7}{30}$ 2) $\frac{7}{12}$ 3) $\frac{7}{31}$ 4) $\frac{7}{365}$

6. Каждый из трех стрелков стреляет в мишень по одному разу, причем попадания первого стрелка составляет 90%, второго – 80%, третьего – 70%. Найдите вероятность того, что все три стрелка попадут в мишень?

- 1) 0,504 2) 0,006 3) 0,5 4) 0,3

7. Из 30 учеников спорткласса, 11 занимается футболом, 6 – волейболом, 8 – бегом, а остальные прыжками в длину. Какова вероятность того, что один произвольно выбранный ученик класса занимается игровым видом спорта?

- 1) $\frac{17}{30}$ 2) 0,5 3) $\frac{28}{30}$ 4) $\frac{14}{30}$

Вариант 5

1. Сколько существует вариантов рассаживания 6 гостей на 6 стульях?

- 1) 36 2) 180 3) 720 4) 300

2. Аня решила сварить компот из фруктов 2-ух видов. Сколько различных вариантов (по сочетанию фруктов) компотов может сварить Аня, если у нее имеется 7 видов фруктов?

- 1) 14 2) 10 3) 21 4) 30

3. Сколько существует обыкновенных дробей, числитель и знаменатель которых – простые различные числа не больше 20?

- 1) 80 2) 56 3) 20 4) 60

4. Упростите выражение: $\frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+2)!}$

- 1) $\frac{(n+1)!}{(n+2)!}$ 2) $\frac{n+1}{(n+2)!}$ 3) $\frac{1}{(n+2)!(n+1)!}$ 4) 0

5. Какова вероятность того, что выбранное двузначное число делится на 12?

- 1) $\frac{12}{90}$ 2) $\frac{4}{45}$ 3) $\frac{12}{45}$ 4) $\frac{90}{8}$

6. Николай и Леонид выполняют контрольную работу. Вероятность ошибки при вычислениях у Николая составляет 70%, а у Леонида – 30%. Найдите вероятность того, что Леонид допустит ошибку, а Николай нет.

- 1) 0,21 2) 0,49 3) 0,5 4) 0,09

7. Музыкальная школа проводит набор учащихся. Вероятность быть не зачисленным во время проверки музыкального слуха составляет 40%, а чувство ритма – 10%. Какова вероятность положительного тестирования?

- 1) 0,5 2) 0,4 3) 0,6 4) 0,04

Ответы к тестам

Вариант 1

№ задания	1	2	3	4	5	6	7
№ ответа	3	2	4	1	2	3	4

Вариант 2

№ задания	1	2	3	4	5	6	7
№ ответа	4	1	2	2	3	1	1

Вариант 3

№ задания	1	2	3	4	5	6	7
№ ответа	1	2	4	3	2	4	1

Вариант 4

№ задания	1	2	3	4	5	6	7
№ ответа	2	1	4	3	2	1	1

Вариант 5

№ задания	1	2	3	4	5	6	7
№ ответа	3	3	2	2	2	4	1

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №8.

Тема: «Решение задач с реальными дискретными случайными величинами».

ЦЕЛЬ РАБОТЫ:

1. Корректировать знания, умения и навыки по теме: «Элементы комбинаторики и теории вероятностей».
1. Закрепить и систематизировать знания по теме.

2. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности обучающихся.

ОБОРУДОВАНИЕ: инструкционно-технологические карты, микрокалькуляторы.

Справочный материал:

Случайная величина – величина, численное значение которой может меняться в зависимости от результата стохастического эксперимента.

Дискретной назовём случайную величину, возможные значения которой образуют конечное множество.

Законом распределения дискретной случайной величины называется правило, по которому каждому возможному значению x_i ставится в соответствие вероятность p_i , с которой случайная величина может принять это значение,

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1$$

причём

Пример. Абитуриент сдаёт два вступительных экзамена: по математике и физике. Составить закон распределения случайной величины x , числа полученных пятёрок, если вероятность получения пятёрки по математике равна 0,8, а по физике – 0,6.

К важнейшим числовым характеристикам случайной величины относятся математическое ожидание и дисперсия.

Математическим ожиданием дискретной случайной величины x называется произведение всех её возможных значений на их вероятности:

$$M(x) = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$

Свойства математического ожидания:

- математическое ожидание постоянной равно самой постоянной:

$$M(C) = C$$

- постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания:

$$M(Cx) = C * M(x)$$

- математическое ожидание суммы случайных величины равно сумме математических ожиданий слагаемых:

$$M\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) = \sum_{i=1}^n M(x_i)$$

- математическое ожидание произведения независимых случайных величин равно произведению математических ожиданий сомножителей:

$$M(x_1 * x_2 * \dots * x_n) = M(x_1) * M(x_2) * \dots * M(x_n)$$

Дисперсией случайной величины x называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от её математического ожидания:

$$D(x) = M((x - M(x))^2) \text{ или } D(x) = M(x^2) - (M(x))^2$$

Среднеквадратическое отклонение: $\sigma = \sqrt{D(x)}$

Свойства дисперсии:

- дисперсия постоянной равно нулю:

$$D(C)=0$$

- постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возведя его в квадрат:

$$D(Cx)=C^2*D(x)$$

- дисперсия суммы (разности) случайных величины равно сумме дисперсий слагаемых:

$$D\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) = \sum_{i=1}^n D(x_i)$$

Свойства среднеквадратического отклонения:

- $\sigma(C) = 0$
- $\sigma(Cx) = C \cdot \sigma(x)$

Пример Закон распределения случайной величины задан таблично. Найти $p(x < 2)$, $p(x > 4)$, $p(2 \leq x \leq 4)$, математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение.

x_i	1	2	3	4	5
p_i	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

Пример Фермер считает, что, принимая во внимание различные потери и колебания цен, он сможет выручить не более 60 центов за десяток яиц и потерять не более 20-ти центов за десяток и что вероятности возможных выигрышей и потерь таковы:

цена за 10 яиц	0,6	0,4	0,2	0	-0,2
P	0,2	0,5	0,2	0,06	0,04

Как оценить ожидаемую прибыль от продажи десятка яиц; от ожидаемых им в этом году 100000 яиц?

Задание. Составить закон распределения случайной величины X. Найти числовые характеристики случайной величины x (x – выигрыш владельца одного лотерейного билета).

- В лотерее разыгрываются N билетов;
- m из них выигрывают по A рублей;
- k из них выигрывают по B рублей;
- p из них выигрывают по C рублей.

Задание 3. Найти числовые характеристики случайной величины “x”. Варианты: Контроль знаний обучающихся:

- проверить практическую работу.

Информационное обеспечение обучения

Печатные и электронные издания

Основные учебные издания:

1. Михин, М. Н. Элементы линейной алгебры : учебное пособие для СПО / М. Н. Михин, С. П. Курдина. — Саратов, Москва : Профобразование, Ай Пи Ар Медиа, 2023. — 151 с. — ISBN 978-5-4488-1586-7, 978-5-4497-1984-3. — Текст : электронный // Электронный ресурс цифровой образовательной среды СПО PROФобразование : [сайт]. — URL: <https://profspo.ru/books/126946>

2. Математика : учебное пособие / М. М. Чернецов, Н. Б. Карбачинская, Е. С. Лебедева, Е. Е. Харитонов ; под редакцией М. М. Чернецова. — 3-е изд. — Москва : Российский государственный университет правосудия, 2022. — 336 с. — ISBN 978-5-93916-959-2. — Текст : электронный // Электронный ресурс цифровой образовательной среды СПО PROФобразование : [сайт]. — URL: <https://profspo.ru/books/122921>

3. Шнарева, Г. В. Элементы высшей математики : учебник для СПО / Г. В. Шнарева. — Саратов, Москва : Профобразование, Ай Пи Ар Медиа, 2023. — 171 с. — ISBN 978-5-4488-1682-6, 978-5-4497-2334-5. — Текст : электронный // Электронный ресурс цифровой образовательной среды СПО PROФобразование : [сайт]. — URL: <https://profspo.ru/books/132561>

Дополнительные учебные издания:

4. Седова, Н. А. Дискретная математика : учебник для СПО / Н. А. Седова, В. А. Седов. — Саратов : Профобразование, 2020. — 329 с. — ISBN 978-5-4488-0451-9. — Текст : электронный // Электронный ресурс цифровой образовательной среды СПО PROФобразование : [сайт]. — URL: <https://profspo.ru/books/89997>

5. Математика в примерах и задачах : учебное пособие / Л. И. Майсеня, В. Э. Жавнерчик, И. Ю. Мацкевич [и др.] ; под редакцией Л. И. Майсени. — Минск : Вышэйшая школа, 2022. — 456 с. — ISBN 978-985-06-3483-2. — Текст : электронный // Электронный ресурс цифровой образовательной среды СПО PROФобразование : [сайт]. — URL: <https://profspo.ru/books/129985>

6. Тетруашвили, Е. В. Математика. Часть 3 : практикум / Е. В. Тетруашвили, В. В. Ершов. — Москва : Ай Пи Ар Медиа, 2022. — 106 с. — ISBN 978-5-4497-1543-2. — Текст : электронный // Электронный ресурс цифровой образовательной среды СПО PROФобразование : [сайт]. — URL: <https://profspo.ru/books/117621>

3.2.2. Интернет ресурсы

7. www.fcior.edu.ru (Информационные, тренировочные и контрольные материалы).

8. www.school-collection.edu.ru (Единая коллекции цифровых образовательных ресурсов).

Электронно-библиотечная система:

9. ЭБС «IPRbooks», ООО «Ай Пи Ар Медиа»
10. ЭБС «Znanium»
11. ЭБС «PROФобразование»
12. ЭБС «Book.ru»

